Bibliografía

* Hamilton. Lógica para matemáticos. Capítulo 3
* Pons, Rosenfeld, Smith. Lógica para Informática. Capítulo 2

Temario

* Lógica de predicados de primer orden. Dominios, Interpretaciones, Satisfacción de fórmulas bien formadas. Niveles de Verdad y falsedad de las fórmulas. Tautologıas, contradicciones, fórmulas lógicamente válidas.

Ejercicios 1.

Señalar las ocurrencias libres o ligadas de x1, x2, x3 en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde C = {c}, F = {f,g}, y P = {A21}, con g de aridad 1; f de aridad 2, A21 de aridad 2.

.

i) ∀x1(∃x2 A21(x1, f(x2, x3)) → ∀x3 A21 (g(c), x1) ∨ A21 (x1, x3)).

El radio de acción de ∀x1 es (∃x2 A21 (x1, f(x2, x3)) → ∀x3 A21 (g(c), x1) ∨ A21 (x1, x3)), por lo tanto x1 está ligada 4 veces, ya que aparece en el ∀x1 luego aparece 3 veces en el radio de acción.

El radio de acción de ∃x2 es A21(x1, f(x2, x3)) por lo tanto x2 aparece ligada 2 veces ya que aparece en el ∃x2 y luego aparece otra vez en el radio de acción de este.

El radio de acción de ∀x3 es A21 (g(c), x1) por lo tanto x3 aparece ligada 1 vez en ∀x3 y luego aparece libre 2 veces, 1 en el consecuente luego del radio de acción y otra en el antecedente antes del radio de acción.

ii) ∀x1(∃x2 A21(x1,f(x2, x3))) → ∀x3 A21 (g(c),x1) ∨ A21 (x1,x3).

El radio de acción de ∀x1 es (∃x2 A21(x1,f(x2, x3))), por lo tanto x1 está ligada 2 veces, ya que aparece en el ∀x1 luego aparece 1 vez en el radio de acción, aparte aparece libre otras dos veces en el consecuente fuera del área de acción.

El radio de acción de ∃x2 es A21(x1,f(x2, x3)) por lo tanto x2 aparece ligada 2 veces ya que aparece en el ∃x2 y luego aparece otra vez en el radio de acción de este.

El radio de acción de ∀x3 es A21 (g(c), x1) por lo tanto x3 aparece ligada 1 vez en ∀x3 y luego aparece libre 2 veces, 1 en el consecuente luego del radio de acción y otra en el antecedente antes del radio de acción.

2. Sean A y B fbfs escritas en un lenguaje de primer orden. Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de fbfs (usar noción de i-equivalencia o contraejemplos según corresponda):

No estoy seguro como es el concepto de equivalencia en este tema, pero por ahora consideraré que dos fbfs son equivalentes si para una misma interpretación se satisfacen para las mismas valoraciones.

i) (∀x) A ∃x A

Tenemos:

* (∀x) A “Para todo x se cumple A”
* ∃x A “Para algún x se cumple A”

Intentaré fundamentar que no se cumple mediante un contraejemplo.

Pienso que no son lógicamente equivalentes ya que (∀x) A necesita satisfacerse para toda v(x), en cambio ∃x A solo debe satisfacerse para 1 v(x). por ende podríamos encontrar una valoración v(x) tal que para esta valoración se cumpla que para determinado x1 no sea satisfaga A, mientras que para otro x2 si es satisface, en este caso (∀x) A no se satisface, ya que existe una valoración para la cual no se satisface en esta interpretación, mientras que ∃x A si se satisface.

ii) ∃x∃y A ∃y∃x A

Tenemos:

* ∃x∃y A “Para algún x e y se cumple A”
* ∃y∃x A “Para algún y e x se cumple A”

Según la proposición 3.29 del HAmilton:

En una interpretación I, una valoración v satisface la la fórmula (∃xi)A si y sólo si existe al menos una valoración v’ que es i-equivalente a v y que satisface A.

Siguiendo esta lógica podemos darnos cuenta que la 1ra fbf ∃x∃yA es satisfacible con una valoración v si y sólo si existe una valoración v’ i-equivalente a v para la variable x que satisface ∃yA.

Siguiendo esta lógica podemos darnos cuenta que la fbf ∃yA es satisfacible con una valoración v si y sólo si existe una valoración v’ i-equivalente a v para la variable y que satisface A.

La cuestión se reduce a si existe una valoración v que satisfaga A en esta interpretación, siempre que esto se cumpla entonces ∃x∃yA sera satisfacible en I.

Para la 2da podemos darnos cuenta que la fbf ∃y∃xA es satisfacible con una valoración v si y sólo si existe una valoración v’ i-equivalente a v para la variable x que satisface ∃xA.

Siguiendo esta lógica podemos darnos cuenta que la fbf ∃xA es satisfacible con una valoración v si y sólo si existe una valoración v’ i-equivalente a v para la variable x que satisface A.

La cuestión se reduce a si existe una valoración v que satisfaga A en esta interpretación, siempre que esto se cumpla entonces ∃y∃xA será satisfacible en I.

.: Tenemos que ambas fbfs serán satisfacibles en I si y sólo si existe una valoración v que satisfaga A, es imposible que en una fbf se satisfaga y en la otra no, por ende en las 2 fbfs A se satisface para las mismas valoraciones y por ende la fbf total que le corresponde a cada una se satisfacen en las mismas Interpretaciones.

iii) ∃x∀y A ∀y∃x A

Tenemos:

* ∃x∀y A “Para algún x y para todo y se cumple A”
* ∀y∃x A “Para todo y y para algún x se cumple A”

iv) ∃x (A ∧ B) ∃x A ∧ ∃x B

Tenemos:

* ∃x (A ∧ B) “Para algún x, se cumple A y se cumple B”
* ∃x A ∧ ∃x B “Para algún x, se cumple A y Para algún x se cumple B”

v) ∃x (A ∨ B) ∃x A ∨ ∃x B

Tenemos:

* ∃x (A ∨ B) “Para algún x, se cumple A o se cumple B”
* ∃x A ∨ ∃x B “Para algún x, se cumple A o Para algún x se cumple B”

vi) ∀x (A ∨ B) ∀x A ∨ ∀x B

Tenemos:

* ∀x (A ∨ B) “Para todo x, se cumple A o se cumple B”
* ∀x A ∨ ∀x B “Para todo x, se cumple A o Para todo x se cumple B”

3. Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:

Conjunto de constantes: C = {c, u}.

Sin símbolos de funcion: F = ∅.

Conjunto de símbolos de predicado: P = {A21}, con A21 de aridad 2.

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

* I(c) = 0
* I(u) = 1
* I(A21(x, y)) = {(x, y) ∈ N × N; x ≤ y} donde I es una funcion de interpretacion semantica.

Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Fundamentar las respuestas.

Decimos que A es SATISFACIBLE cuando existe una interpretación I y una valoración v, donde I=I,vA.

i) A21(c, x) es satisfacible en I.

Probaremos que es SATISFACIBLE en I hallando una valoración donde I=I,vA.

para esto diremos que v(x)=2

I=I,v A21(c, x) si y sólo si (v(c), v(x)) ϵ (A21)

si y sólo si (0, 2) ϵ (A21)

Lo cual es cierto.

.: Existe una interpretación I y una valoración v, donde I=I,v A.

.: A es satisfacible para la valoración elegida.

ii) A21(u, x) es satisfacible en I.

Probaremos que es SATISFACIBLE en I hallando una valoración donde I=I,vA.

para esto diremos que v(x)=2

I=I,v A21(c, x) si y sólo si (v(c), v(x)) ϵ (A21)

si y sólo si (1, 2) ϵ (A21)

Lo cual es cierto.

.: Existe una interpretación I y una valoración v, donde I=I,v A.

.: A es satisfacible para la valoración elegida.

iii) ∀x A21(c, x) es satisfacible en I.

En esencia debo probar la i-equivalencia, lo haré mediante inducción.

sabemos que tenemos números enteros: 0,1,2,...,n,n+1., por lo tanto separaremos i valuaciones que vendrían a ser v(x0),v(x1),v(x2),...,v(xi),v(xi+1). Donde cada una se corresponderá al entero que es indicado por el subíndice.

1) Base: Demostramos que se cumple para v(x0):

I=I,v A21(c, x0) si y sólo si (v(c), v(x0)) ϵ (A21)

si y sólo si (0, 0) ϵ (A20)

si y sólo si 0 ≤ 0 (Lo que es cierto)

.: I=I,v A21(c, x0) osea ∀x A21(c, x) es satisfacible para v(x0)=0

2) Paso inductivo: si se cumple para v(xi) entonces para v(xi+1) también se cumple:

Sabemos que con i=n entonces I=I,v A Por lo tanto:

I=I,v A21(c, xi) si y sólo si (v(c), v(xi)) ϵ (A21)

si y sólo si (0, n) ϵ (A21)

si y sólo si 0≤n

Asumiremos que esto es cierto. Osea ∀x A21(c, x) es satisfacible para v(xi)=n

Ahora pensemos que necesitamos para probar que si se cumple para v(xi) entonces para v(xi+1) también se cumple:

I=I,v A21(c, xi+1) si y sólo si (v(c), v(xi+1)) ϵ (A21)

si y sólo si (0, n+1) ϵ (A21)

si y sólo si 0≤n+1

Sabemos por la hipótesis que (0, n) ϵ (A21) por ende 0≤n, también sabemos que n≤n+1, teniendo en cuenta esto obtenemos aplicando la propiedad transitiva que 0≤n+1.

.: I=I,v A21(c, xi+1) Osea ∀x A21(c, x) es satisfacible para v(xi+1)=n+1

.: Queda probado el paso inductivo.

.: Ya probados 1) y 2) entonces queda probado por inducción que ∀x A21(c, x) es satisfacible en I.

iv) ∀x A21(u, x) es satisfacible en I.

Esto lo probaré por contraejemplo.

Sabemos que I=I,v ∀x A21(u, x) si y solo si para toda valoracion w, i-equivalente se cumple que I=I,v A21

, pero puedo encontrar una valoración w en la que no se cumple que I=I,v A21, esta sería en la que v(x)=0, lo pruebo a continuación:

I=I,v A21(c, x) si y sólo si (v(u), v(x)) ϵ (A21)

si y sólo si (1, 0) ϵ (A21)

si y sólo si 1≤0

Lo cual es claramente falso.

.: ∀x A21(u, x) no es satisfacible en I.

v) A21(c, x) es verdadera en I.

Es equivalente a probar que ∀x A21(c, x) es satisfacible en I

lo que ya hice en el indice iii)

vi) ∀x A21(c, x) es lógicamente válida.

Esto es falso, para que sea lógicamente válida entonces debe ser verdadera para toda interpretación.

Demostrare que no es así con un contraejemplo:

Utilizaremos la interpretación que dice que

I(A21)={(x, y) ∈ N × N; x > y}

Ahora probaremos que no es verdadera hallando una valuacion en la no se satisface:

Esta sería

v(x)=0

Para que ∀x A21(c, x) se satisfaga entonces para todo i se debe satisfacer A21(c, xi), hallando 1 que no sea satisfacible entonces ∀x A21(c, x) no será satisfacible.

probare que A21(c, xi) no se satisface en I, cuando i=1:

I=I,v A21(c, xi) si y sólo si (v(c), v(xi)) ϵ (A21)

si y sólo si (0, 1) ϵ (A21)

si y sólo si 0>1

Lo cual es falso.

.: existe una valuacion para la cual no se satisface en I, utilizando la relación menor.

.: ∀x A21(c, x) no es verdadera, utilizando la relación menor.

.: ∀x A21(c, x) no es lógicamente válida ya que existe una interpretación en la que no es verdadera.

vii) A21(u, c) ∧ ¬A21(u, c) es contradictoria.

Para que sea contradictoria entonces debe ser falsa en toda interpretación.

Tenemos A21(u, c) y su contradicción ¬A21(u, c).

Diremos que solo se satisface A21(u, c) ∧ ¬A21(u, c) para cierta valoración, cuando se satisface A21(u,c) y ¬A21(u,c) para la misma valoración.

Lo que nos lleva a la pregunta: ¿podemos hacer que se satisfagan ambos a la vez?

La respuesta es no, ya que estos 2 son mutuamente excluyentes, si A21(u, c) se satisface entonces ¬A21(u, c) no lo hará y viceversa.

.: Es imposible que A21(u, c) ∧ ¬A21(u, c) sea satisfacible para alguna interpretación I, ya que es imposible que para alguna I(A21) se cumpla que A21(u, c) ∧ ¬A21(u, c) a la vez.

(me causa duda si lo hice bien porque la fundamentación me quedo de una forma bastante coloquial) ¿Está bien como lo fundamente?

4. Ofrecer una interpretación para los siguientes lenguajes de primer orden donde las fórmulas sean verdaderas y otra donde sean falsas. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

i) C = F = ∅, P = {A21}, con A21 de aridad 2.

* ∀x∀y(A2 1 (x, y) → A2 1 (y, x)).
* ∀x(A2 1 (x, x)).
* ∀x∀y∀z((A2 1 (x, y) ∧ A2 1 (y, z)) → A2 1 (x, z)).

i)

Definimos la siguiente interpretación en el dominio de los naturales para el cual en las 3 fbfs se da que esta es verdadera en I:

I(A21)= relación de igualdad.

a) ∀x∀y(A21(x, y) → A21(y, x))

Con esta interpretación podríamos traducir al lenguaje natural de la siguiente forma:

“Para todo x e y, si x=y entonces y=x”

.: Se hace evidente que es verdadera para esta interpretación.

b) ∀x(A21(x, x)).

Con esta interpretación podríamos traducir al lenguaje natural de la siguiente forma:

“Para todo x, se cumple que x=x”

.: Se hace evidente que es verdadera para esta interpretación.

c)∀x∀y∀z((A21(x, y) ∧ A21(y, z)) → A21(x, z))

Con esta interpretación podríamos traducir al lenguaje natural de la siguiente forma:

“Para todo x,y,z, si x=y y y=z entonces x=z”.

.: Se hace evidente que es verdadera para esta interpretación.

Ahora definimos la siguiente interpretación en el dominio de los naturales para el cual en las 3 fbfs se da que esta es falsa en I:

I(A21)= relación de sucesor.

a) ∀x∀y(A21(x, y) → A21(y, x))

Con esta interpretación podríamos traducir al lenguaje natural de la siguiente forma:

“Para todo x e y, si y es sucesor de x entonces x es el sucesor de y”

Evidentemente esta afirmación es falsa, si se cumple el antecedente entonces tendríamos que y=x+1 y que x=y-1, sabemos que si esto se da entonces también se da en el consecuente que x=y+1, pero ya obtuvimos que x=y-1, para que esto se cumpla se tiene que dar que y+1=y-1 lo cual es absurdo.

.: Se hace evidente que es falsa para esta interpretación.

b) ∀x(A21(x, x)).

Con esta interpretación podríamos traducir al lenguaje natural de la siguiente forma:

“Para todo x, se cumple que x es sucesor de x”

Evidentemente esta afirmación es falsa, el sucesor de x es x+1 no x.

.: Se hace evidente que es falsa para esta interpretación.

c)∀x∀y∀z((A21(x, y) ∧ A21(y, z)) → A21(x, z))

Con esta interpretación podríamos traducir al lenguaje natural de la siguiente forma:

“Para todo x,y,z, se cumple que y es sucesor de x y z es el sucesor de y entonces z es el sucesor de x”

Evidentemente esta afirmación es falsa, dado x su sucesor es y=x+1 y el sucesor de y es z=x+1+1=x+2, suponiendo que esto es cierto entonces nos dice que z es el sucesor de x, osea z=x+1, lo cual contradice el antecedente que nos dijo que z=x+2.

.: Se hace evidente que es falsa para esta interpretación.

ii) C = {c}, F = {f}, P = {A21}, con f y A21 de aridad 2.

* ∀x(A21 (x, c) → A21 (x, f(y))).
* ∀x(¬A21 (x, x)).
* ¬∀x∀y(A21 (x, y)).

Definimos la siguiente interpretación en el dominio de los naturales para el cual en las 3 fbfs se da que esta es verdadera en I:

I(c)= es cero de los naturales

I(f11)= función que siempre devuelve cero.

I(A21)= relación de desigualdad.

a) ∀x(A21(x, c) → A21(x, f(y))).

Voy a asumir que f tiene aridad 1, ya que esto contradice el enunciado

En lenguaje natural sería

“Para todo x, si x!=0 entonces x!=f(y), donde f(y)=0”

.: Se hace evidente que es verdadero para esta interpretación.

b) ∀x(¬A21(x, x)).

En lenguaje natural sería

“Para todo x,no es cierto que x!=x”

.: Esta afirmación evidentemente es cierta para todo x, por lo tanto la fbf es Verdadera para esta interpretación.

c) ¬∀x∀y(A21(x, y)).

En lenguaje natural sería

“No para todo x e y, es cierto que x!=y”

.: Esta afirmación evidentemente es cierta ya que existen las valuaciones v(x)=2 y v(y)=5 tal que v(x)!=v(y).

Definimos la siguiente interpretación en el dominio de los naturales para el cual en las 3 fbfs se da que esta es falsa en I:

I(c)= 1.

I(f11)= función que siempre devuelve 0,5

I(A21)= {(x, y) ∈ N × N; x=y+p, donde p ϵ N}.

a) ∀x(A21(x, c) → A21(x, f(y))).

En lenguaje natural sería

“Para todo x, si x=1+p (donde p ϵ N) entonces x=f(y)+p (donde p ϵ N), y sabemos que f(y)=0,5”

.: Evidentemente es falso en la interpretación actual, ya que el consecuente siempre será falso a pesar de que el consecuente sea verdadero, ya que es imposible de la suma de un racional no natural y un natural obtener un natural.

b) ∀x(¬A21(x, x)).

En lenguaje natural sería:

“Para todo x, no es cierto que x=x+p (donde p ϵ N)”

si utilizamos p=0 (sabemos que 0 ϵ N), A21(x, x) se satisface y por ende ¬A21(x, x) no se

satisface y por ende queda probado que ∀x(¬A21(x, x)) es falsa.

.: Esta afirmación evidentemente no se satisface nunca.

c) ¬∀x∀y(A21(x, y)).

En lenguaje natural sería “No para todo x e y, x=y+p (donde p ϵ N)”

.: Se hace evidente que es falso para esta interpretación, que todo numero x entero se puede expresar como la suma de un entero y y otro entero cualquiera.

5) Determinar si las siguientes fbfs escritas en algún lenguaje de primer orden son contradictorias, satisfacibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación o lógicamente válidas. Fundamentar.

i - (∃x)(¬A(x)) ∨ (∀x)(A(x) ∨ B(x)).

“Existe al menos un x con el que no se cumple A(x) o Para todo x, se cumple A(x) o B(x)”

Primero debemos pensar ¿(∃x)(¬A(x)) ∨ (∀x)(A(x) ∨ B(x)) es satisfacible?

Esto solo ocurrirá si se satisface (∃x)(¬A(x)) o se satisface (∀x)(A(x) ∨ B(x)).

Primero analizaremos (∃x)(¬A(x)), sabemos que solo se satisface si existe una valuacion de la misma interpretación que satisface (¬A(x)).

* Si esta valuacion existiera entonces (∃x)(¬A(x)) sería no solo satisfacible en esa interpretación sino también verdadera en esta, debido a que si hay una entonces en toda valuacion de la interpretación también se satisface gracias al ∃x, si esta (∃x)(¬A(x)) es verdadera entonces (∃x)(¬A(x)) ∨ (∀x)(A(x) ∨ B(x)) también lo será en esta interpretación gracias al “∨”.
* Si no existe entonces para todas las valuaciones en dicha interpretación en la que no se satisfaga nunca (∃x)(¬A(x)), esto implica que para esta interpretación siempre se satisface A(x), si esto ocurre (∀x)(A(x) ∨ B(x)) se satisface, ya que para cualquier valuacion de la interpretacion, A(x) sera satisfacible, y gracias al “∨” nos dará igual si B(x) se satisface. Ya que se satisface para toda valuacion entonces podemos decir que (∀x)(A(x) ∨ B(x)) es verdadero en esta interpretación, si esta (∀x)(A(x) ∨ B(x)) es verdadera entonces (∃x)(¬A(x))∨(∀x)(A(x)∨B(x)) también lo será gracias al “∨”.

Por lo tanto ya que en ambos posibles casos la interpretación será verdadera, entonces diremos que (∃x)(¬A(x))∨(∀x)(A(x)∨B(x)) es lógicamente válida, ya que para toda interpretación ésta será verdadera.

ii - ∃y∃x P(x, y) → ∃x∃y P(x, y).

“Existe al menos un x e y, tal que si se cumple P(x,y) entonces existe un x,y que cumplen P(x,y)”

La observación 3.25 de Hamilton en el inciso d) dice que En una interpretación dada I, una fbf (A->B) es falsa si y sólo si A es verdadera y B es falsa.

Vamos a demostrar que con formula actual es imposible llegar a esa situación.

En nuestro caso A=∃y∃x P(x, y) y B=∃x∃y P(x, y), la pregunta a hacernos sería:

¿Se satisfacen en las mismas valoraciones?

La respuesta a esto es que si (Está más desarrollado en el punto 2 inciso ii)), ya que si P(x,y) se satisface para una valoración v en una interpretación I, tanto A como B serán verdaderas en I ya que si existe una v que satisface P(x,y) todas las valoraciones para A o B son satisfacibles, si no existe una v que satisface P(x,y) entonces ninguna v para A o B serán satisfacibles nunca, por ende estas fbfs serán falsas en dicha I.

Entonces al 2 posibles casos:

* Existe una valoración v que satisface P(x, y): entonces las fbf A y B serán verdaderas en la interpretación, por ende ∃y∃x P(x, y) → ∃x∃y P(x, y) será verdadero en la interpretación, ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderas en I.
* No existe una valoración v que satisface P(x, y): entonces las fbf A y B serán falsas en la interpretación, por ende ∃y∃x P(x, y) → ∃x∃y P(x, y) será verdadero en la interpretación, ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos en I.

Estos dos casos abarcan todas las situaciones que pueden ocurrir con distintas valoraciones v en cualquier interpretación I, siempre llegamos a la conclusión de que ∃y∃x P(x, y) → ∃x∃y P(x, y) será verdadero para I, por ende no es posible llegar al caso en que la fbf sea falsa en I alguna, ya que no se puede dar que A sea verdadero y B falso en la valoración para esta fbf.

.: La fbf es lógicamente válida.

6. i) Si la fbf A(x) es satisfacible, ¿entonces la fbf ∃x A(x) es lógicamente válida?. Fundamentar.

Falso, si A(x) es satisfacible esto solo indica que existe una interpretación y una valoración en la que I=I,vA.

Para que sea lógicamente válida entonces I=I,vA debe ser cierto para toda valoración en toda interpretación.

ii) La fbf abierta ∀y P(x, y) → ∀y∀x P(x, y) ¿es lógicamente válida?. Fundamentar.

iii) Sea un lenguaje de primer orden con la letra de constante c y las letras de predicado P y Q, ambas de aridad 1. Sea la fbf : (P(c) ∨ ∀x(P(x) → Q(x))) → Q(c) ¿Es lógicamente válida? Fundamentar.

iv) Sean A y B dos fbf escritas en un lenguaje de primer orden. La fbf: ∀x(A(x) ∨ B(x)) → ((∀xA(x)) ∨ (∀xB(x))) es lógicamente válida? Fundamentar.

7. Sea A una fbf de un lenguaje de primer orden, I una interpretación para tal lenguaje. Demostrar que A es verdadera en I si y sólo si ¬A es falsa en I.

8. Sea A una fbf que no contiene cuantificadores (es decir, abierta) escrita en algún lenguaje de primer orden. Sea I una interpretación para tal lenguaje. ¿Es posible decidir acerca del valor de verdad de A en I? Fundamentar.